GLOBAL FUNCIONES **Febrero 2006**

1. Dadas las funciones:

$f(x) = 2^x$ $g(x) = \sqrt{x-3}$ $\mathrm{h(x)} = \dfrac{2}{\mathrm{x}-1}$

Calcula:

a) $f \circ g,\ g \circ f,\ f \circ h,\ g \circ h$

b) $g^{-1},\ h^{-1}$

2. Representa gráficamente la función $y = \cos x$ y escribe sus características. A partir de la gráfica anterior, representa razonadamente las funciones: $y = \cos x - 1$, $y = \cos(x + \pi)$.

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ -1 & 0 \le x < 3 \\ x + 2 & x \ge 3 \end{cases}$, represéntala gráficamente y estudia su continuidad.

4.- Dada la función $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

a) Halla su dominio.
b) Estudia su continuidad
c) Halla sus asíntotas.
d) Haz un esbozo de su gráfica.

5.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}$. Calcula su límite en los puntos:

a) x = 2 b) x = -2 c) x = 0 d) $x \to +\infty$ e) $x \to -\infty$

PUNTUACIÓN: 2 puntos cada ejercicio

SOLUCIONES

1.- $f(x) = 2^x \quad g(x) = \sqrt{x-3} \qquad \mathrm{h}(\mathrm{x}) = \dfrac{2}{\mathrm{x}-1}$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{x-3}\right] = 2^{\sqrt{x-3}}$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[2^x\right] = \sqrt{2^x - 3}$

$(f \circ h)(x) = f[h(x)] = f\left[\dfrac{2}{x-1}\right] = 2^{2/x-1}$

$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g\left[\dfrac{2}{x-1}\right] = \sqrt{\dfrac{2}{x-1} - 3} = \sqrt{\dfrac{2-3x+3}{x-1}} = \sqrt{\dfrac{5-3x}{x-1}}$

b)

$g(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow y = \sqrt{x-3} \rightarrow x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3 \Rightarrow y = x^2 + 3 \rightarrow g^{-1}(x) = x^2 + 3$

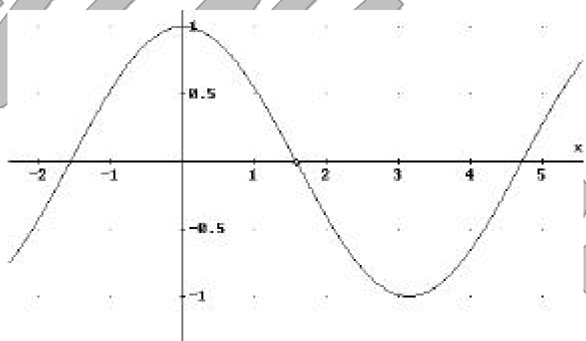
Comprobación: $\left(g \circ g^{-1}\right)(x) = g\left(x^2+3\right) = \sqrt{x^2+3-3} = x$

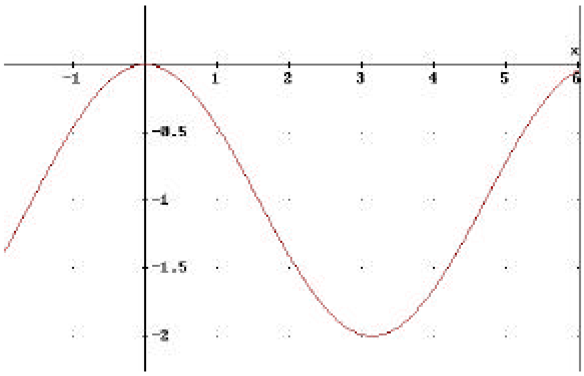
$\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \dfrac{2}{\mathrm{x}-1} \Rightarrow y = \dfrac{2}{x-1} \rightarrow x = \dfrac{2}{y-1} \Rightarrow x(y-1) = 2 \Rightarrow xy - x = 2 \Rightarrow xy = x+2 \Rightarrow$

$y = \dfrac{x+2}{x} \Rightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x}$

Comprobación: $\left(h \circ h^{-1}\right)(x) = h\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = \dfrac{2}{\dfrac{x+2}{x} - 1} = \dfrac{2}{\dfrac{x+2-x}{x}}\, x$

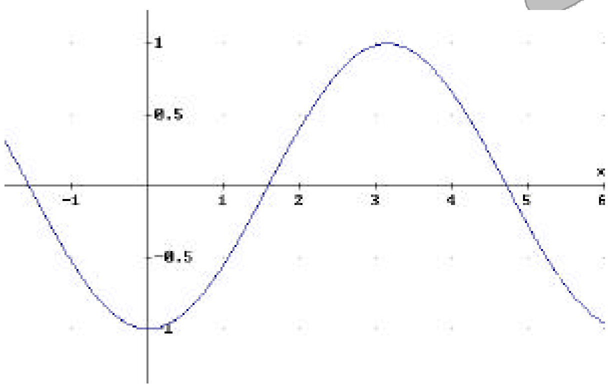
2.- Características de la función coseno:
Dominio R, continua en R, periódica de periodo 2π, toma valores entre –1 y 1.
Gráfica:





La gráfica de la función $y = \cos x - 1$ será la anterior desplazada 1 unidad hacia la abajo.

La gráfica de la función $y = \cos(x + \pi)$ será la de la función coseno desplazada π hacia la izquierda



3.- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \quad \textit{parábola, continua} \\ -1 & 0 \le x < 3 \quad \textit{recta horizontal, continua} \\ x + 2 & x \ge 3 \quad \textit{recta, continua} \end{cases}$

habrá que estudiar qué pasa en los puntos de "enganche", 0 y 3.

En 0:

$f(0) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(-1) = -1$

En 3:

$f(3) = 3 + 2 = 5$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3}(-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3}(x + 2) = 3 + 2 = 5$

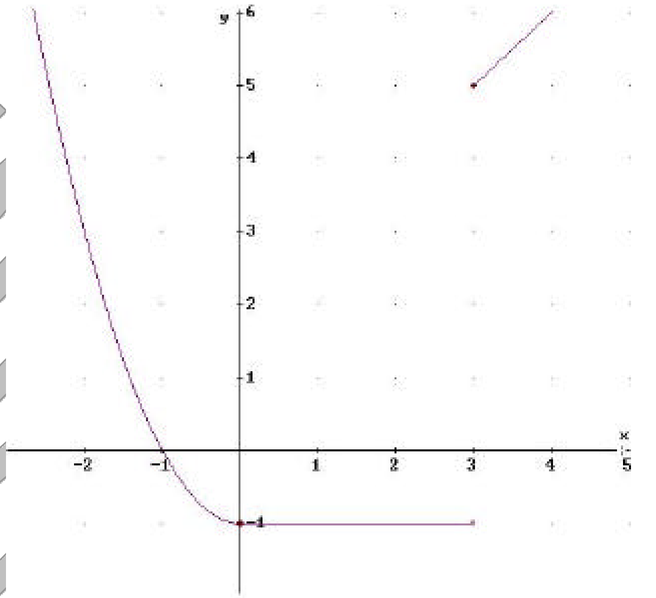
La función es continua en $R - \{3\}$, en el punto 3 tiene una discontinuidad de salto.

Gráfica:

Parábola: mira hacia arriba

Vértice (0,-1)

Corta eje OX en –1



4.- Dada la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

a) Dominio: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow Dom(f) = R - \{-1,1\}$

b) Estudia su continuidad: es continua en su dominio, es decir en $R - \{-1,1\}$

c) Halla sus asíntotas:

Verticales: el denominador se anula en –1 y 1 (posibles A.V.), veamos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \infty \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

A.V. x = 1 ramas divergentes

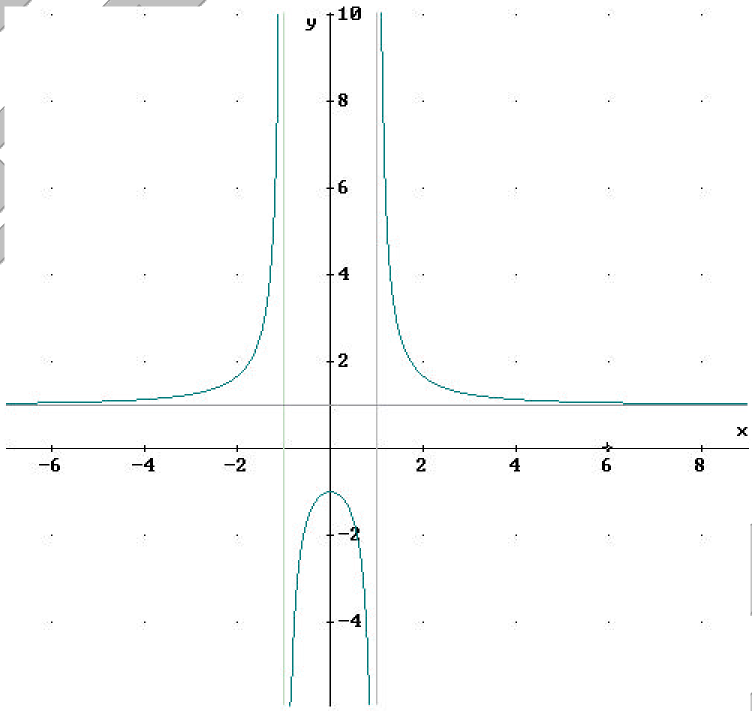
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \infty \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

A.V. x = -1 ramas divergentes

Horizontales:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{1}=1\Rightarrow\ y=1$ es A. Horizontal $\left\langle\begin{array}{l} x=1000\rightarrow\ y=1'000002 \\ x=-1000\rightarrow\ y=1'000002\end{array}\right.$ por arriba

d) Gráfica aproximada:



5.-a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\frac{8-16+8}{4-4}=\frac{0}{0}$ (IND) factorizamos y simplificamos:

$x^3-4x^2+4x=x(x^2-4x+4)=x(x-2)^2,\ x^2-4=(x+2)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x+2}=\frac{0}{4}=0$$

b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\frac{8-16-8}{0}=\frac{-16}{0}=\infty\left\langle\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\frac{-16}{0^+}=-\infty \\ \lim_{x\to -2^+}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\frac{-16}{0^-}=+\infty\end{array}\right.$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\frac{0}{-4}=0$

d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=+\infty$

e) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=-\infty$